Tema 5 Proporcionalidad y escalas

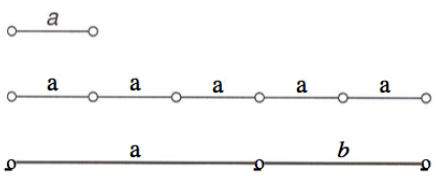
Proporcionalidad

Es la relación que existe entre las partes de una figura con respecto al todo y a los demás objetos. También se dice que la proporcionalidad es la relación que existe entre dos figuras que tienen la misma forma, pero diferente tamaño.

Razón

Razón entre dos segmentos, a y b, es el valor de la relación entre las longitudes de ambos segmentos; los segmentos a y b, son los términos de la razón. Por tanto, este concepto posibilita comparar dos segmentos y saber cuántas veces uno es contenido en el otro. La razón se denomina mediante la letra K. Es decir:

Razón = a/b = K

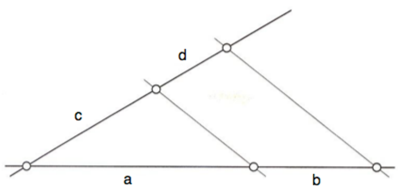


Proporción

Es la igualdad entre dos razones. Es decir, si se toman cuatro segmentos, a, b, c y d, se dice que son proporcionales cuando, tomados dos a dos, su razón es la misma

a/b = c/d

- **Medios** se llaman a los términos b y c.
- **Extremos** se llaman a los términos a y d.



Proporcionalidad directa

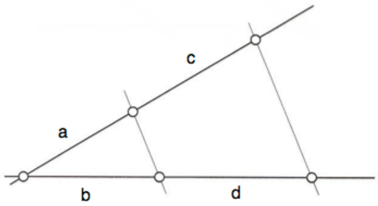
Se dice que son magnitudes **directamente proporcionales** aquellas que varían de tal forma que su razón permanece constante.

a/b = a'/b' = a"/b" = ...

Por tanto, se denominan segmentos directamente proporcionales a los segmentos que cumplen:

$$a/b = c/d = K$$

Donde K es la constante de proporcionalidad directa.



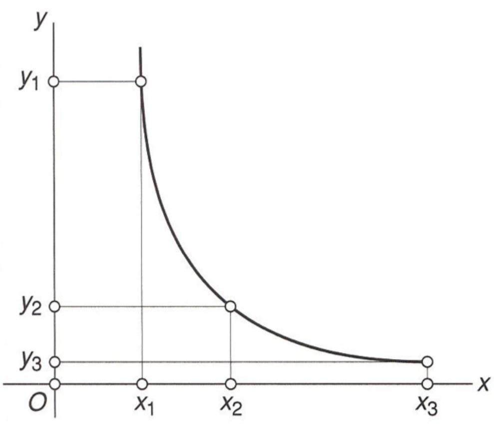
Proporcionalidad inversa

Se dice que son magnitudes inversamente proporcionales aquellas que varían de tal forma que su producto permanece constante. Es decir, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma proporción.

Dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales cuando se verifica que:

$$x_1\, y_1 = x_2\, y_2 = \quad = K$$

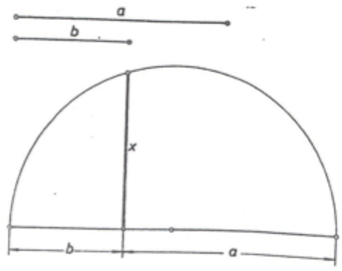
Donde K es la constante de proporcionalidad inversa.



Construcción de la media proporcional

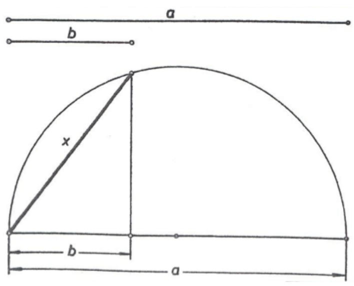
Por el **teorema de la altura**

<u>Teorema de la altura</u>: la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es la media proporcional entre los segmentos en que divide la hipotenusa. $x^2 = a \cdot b$



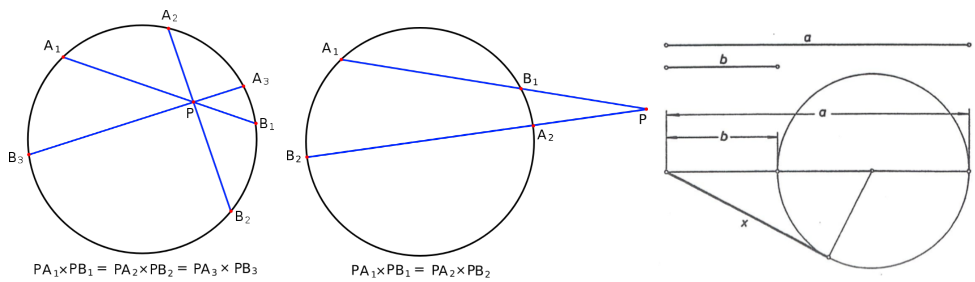
Por el **teorema del cateto**

<u>Teorema del Cateto</u>: cada cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. $x^2 = a \cdot b$



Por la **potencia de un punto**

<u>Potencia de un punto</u>: la potencia de un punto P respecto de una circunferencia, viene dada por el producto de las distancias a cualquier par de puntos de la circunferencia alineados con P. El valor de la potencia es constante para cada punto P, independientemente de la elección de los puntos de la circunferencia. El punto P puede estar dentro y fuera de la circunferencia. Estando el punto P fuera de la circunferencia, la recta tangente es un caso extremo y resulta. $x^2 = a \cdot b$



Transformaciones geométricas en el plano

Se define una **transformación geométrica** como la operación que posibilita obtener una figura nueva a partir de otra dada. Por medio de esta transformación se establece una serie de correspondencias entre elementos (puntos, rectas) o figuras.

Con el nombre de **movimientos** se denominan las transformaciones geométricas que conservan la forma y el tamaño de la figura inicial.

En una transformación geométrica se denominan **elementos dobles o invariantes** a los que al aplicarles la transformación siguen situados en el mismo lugar geométrico, es decir, se transforman en sí mismos.

Clasificación

Atendiendo a las características métricas de la figura transformada respecto a la originaria, las transformaciones geométricas en el plano se clasifican del modo siguiente:

- **Transformaciones isométricas**. Se caracterizan porque la figura transformada conserva las magnitudes y los ángulos de la figura inicial; es decir, el resultado final de la transformación es una figura idéntica a la de partida. Forman parte de las transformaciones isométricas las siguientes: **igualdad, traslación, simetría y giro**.
- **Transformaciones isomórficas**. Son las que su figura transformada conserva sólo la forma de la figura de partida, Los ángulos son iguales y las magnitudes proporcionales. Dentro de este tipo de transformaciones se encuentran la **homotecia y la semejanza**.
- **Transformaciones anamórficas**. En estas transformaciones la figura transformada es totalmente diferente a la figura de partida. La **equivalencia** es un ejemplo de este tipo de transformación geométrica.

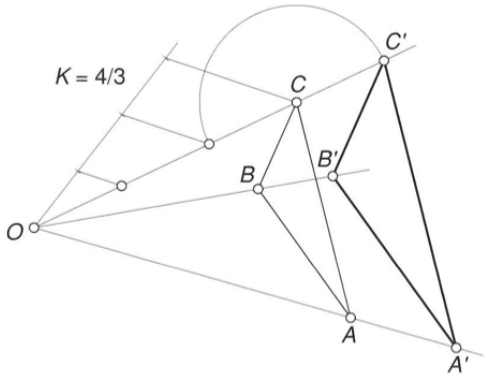
Igualdad e identidad

Dos figuras planas son **iguales** cuando sus lados y sus ángulos son iguales y, además, están dispuestos en el mismo orden.

Dos figuras son **idénticas** cuando coinciden exactamente al superponerlas.

Homotecia

Es una transformación geométrica en la que a cada punto (A, B ...) se le hace corresponder otro punto (A', B' ...) estando ambos alineados con un punto fijo O, llamado centro de homotecia, y verificándose que OA' / OA = K; siendo K la razón de la homotecia.



Semejanza

Dos figuras son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

Los elementos que se corresponden en una figura original y su semejante se denominan homólogos.

Razón de semejanza, K, es la relación de proporcionalidad que existe entre segmentos homólogos, K = A'B' / AB; de tal modo, se verifica lo siguiente:

- Si K > 1 la figura semejante es mayor que la original.
- Si K < 1 la figura semejante es menor que la original.
- Si K = 1 la figura semejante es igual a la original.

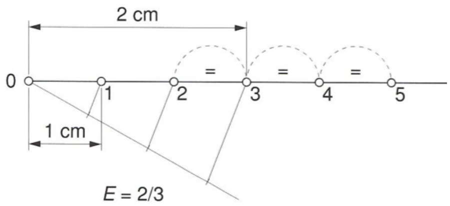
Cuando dos figuras semejantes están alineadas con relación a un punto fijo, O, pasan a denominarse homotéticas, siendo O el centro de homotecia. Al igual que sucede en la homotecia, la semejanza puede ser directa o inversa dependiendo del sentido que tenga la figura original con respecto a su transformada. Es conveniente tener en cuenta que no todas las figuras semejantes son homotéticas.

Escalas

A veces, cuando se va a representar un objeto, surgen dificultades derivadas de su tamaño, bien porque es muy grande para dibujarlo en Los límites del papel de dibujo, o porque es muy pequeño y no se pueden precisar detalles de su forma. Las escalas surgen para dar solución a estos problemas que se plantean en la representación gráfica de los objetos.

La escala es la razón que existe entre Las dimensiones de un dibujo y sus correspondientes medidas en la realidad.

Esta relación puede expresarse en forma de proporción (escala 2:3), en forma de fracción (escala 2/3), en forma decimal (escala = 0,66), o en forma gráfica.



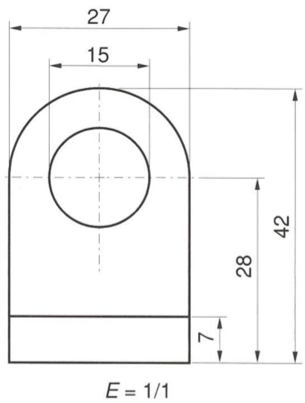
Escala = medida del dibujo / medida de la realidad.

Sobre la base de la igualdad de que escala E es igual a la medida gráfica del dibujo D dividido entre su correspondiente realidad, R, podemos hallar cualquiera de los otros datos:

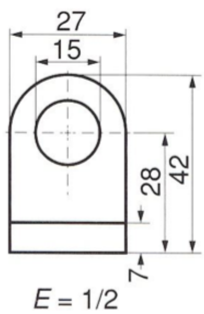
E = D / R; D = E · R; R = D / E

Tipos de escalas

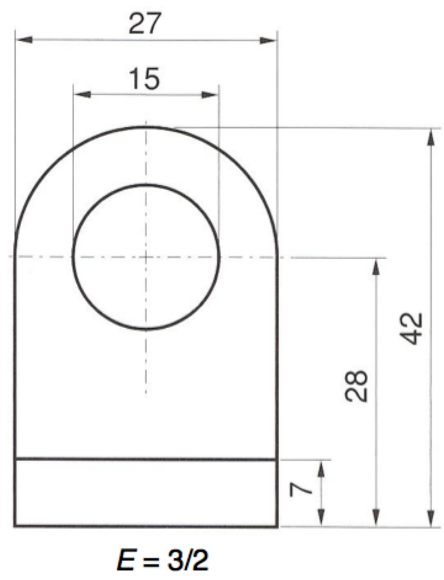
Escala natural: es la que tiene la relación 1:1. En ella, las medidas del dibujo son iguales a las de la realidad. E = mD / mR = 1.



Escala de reducción: las medidas del dibujo son menores que las reales; por ejemplo, 1/2. E = mD / mR < 1.



Escala de ampliación: en este caso las medidas del dibujo son mayores que las reales; por ejemplo, 3/2. E = mD / mR > 1

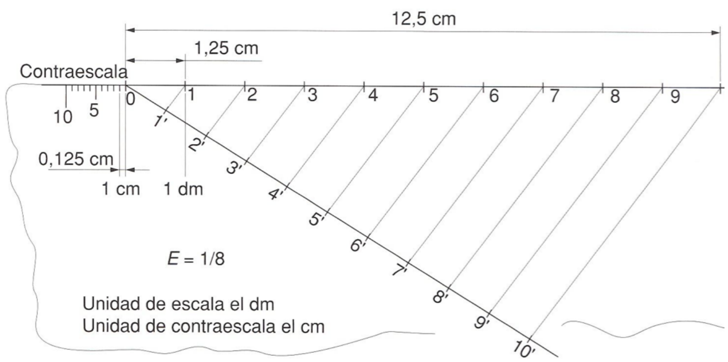


Escala gráfica: ejemplo

Supongamos que la escala es de 1/8. Podríamos expresarla también en forma decimal: 0,125, lo que nos indica que, por cada unidad en la realidad, utilizamos 0,125 unidades en el dibujo.

Si elegimos el centímetro como unidad, 100 cm reales tienen una representación en el dibujo de 12,5 cm; es decir, 1 m sería igual a 12,5 cm. En este caso, se coloca sobre el borde de un papel o cartulina la medida de 12,5 cm y se divide en diez partes iguales, con lo que se obtiene el valor de cada decímetro en la escala gráfica.

A la izquierda del cero se transporta una unidad de escala, que se divide en diez partes iguales, quedando así representada la contraescala.

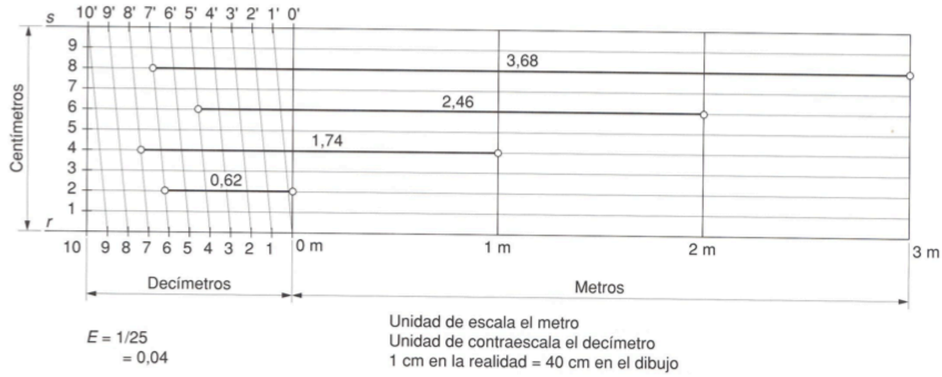


Escala transversal

Este tipo de escala se utiliza siempre que es necesario trabajar precisando décimas en la representación del dibujo. El proceso de construcción de la escala transversal vamos a desarrollarlo tomando como ejemplo la escala 1/25.

1. Se realiza la escala gráfica o volante de la escala dada, 1/25 sobre una recta r. Por los puntos 0 m, 1 m, 2 m, 3 m, etc. y 10 de la contraescala, y se trazan perpendiculares a la recta r.
2. Sobre la perpendicular trazada en el punto 10 se llevan las diez divisiones de la contraescala, y por ellas se trazan paralelas a la recta r, es decir, la recta donde está representada la escala gráfica.

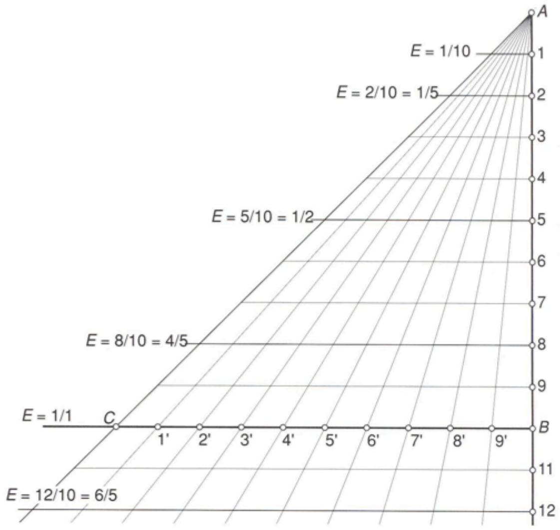
3. Se llevan las divisiones de la contraescala 1, 2, 3, etc., sobre la recta s, determinando los puntos 1', 2', 3'... Se unen los puntos 0 con 1', el 1 con 2', y así sucesivamente hasta unir 9 con 10'; de este modo, se habrá terminado la construcción de la escala transversal, también denominada de décimas.
4. En los segmentos trazados sobre la escala se puede apreciar sus magnitudes.



Triángulo universal de escalas

Partiendo de un triángulo rectángulo isósceles podemos crear cualquier tipo de escala gráfica, tanto de reducción como de ampliación. El proceso de construcción es el siguiente:

1. Se parte de un triángulo rectángulo isósceles ABC cuyos catetos tienen una longitud, cada uno de ellos, de 10 cm. Se dividen éstos en diez partes iguales determinando los puntos 1, 2, 3 ..., y 1', 2', 3'... Se prolonga el cateto AB y la hipotenusa AC.
2. Se trazan paralelas por los puntos 1, 2, 3, etc., y se unen, posteriormente, los puntos 1', 2', 3' ... con el vértice A del triángulo.
3. Fijándose en la construcción se pueden observar diferentes escalas de reducción: escala 8/10 igual a 4/5, escala 5/10 igual a 1/2 ,etcétera.
4. Prolongando las rectas que concurren en A, y trazando más paralelas al cateto BC, separadas por ejemplo con la distancia A1, se determinan otras tantas escalas, en este caso de ampliación: escala 12/10 igual 6/5, etcétera.



Escalas normalizadas

La norma UNE-1.026-83 recomienda las siguientes escalas para el dibujo técnico:

Escalas de ampliación: 50:1, 20:1 y 10:1

Tamaño natural: 1:1

Escalas de reducción: 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1000, 1:2000, 1:5000, 1:10000.

<table>
<tr><th colspan="4">Escalas de reducción</th><th rowspan="2">Escalas de ampliación</th></tr>
<tr><th>Fabricación e instalación</th><th>Construcciones civiles y edificación</th><th>Topografía</th><th>Urbanismo</th></tr>
<tr><td>1:2,5
1:5
1:10
1:20
1:50
1:100
1:200</td><td>1:5
1:10
1:20
1:50
1:100
1:200
1:500
1:1000</td><td>1:100
1:200
1:500
1:1000
1:2000
1:5000
1:10000
1:25000
1:50000</td><td>1:500
1:2000
1:5000
1:25000
1:50000</td><td>2:1
5:1
10:1</td></tr>
</table>

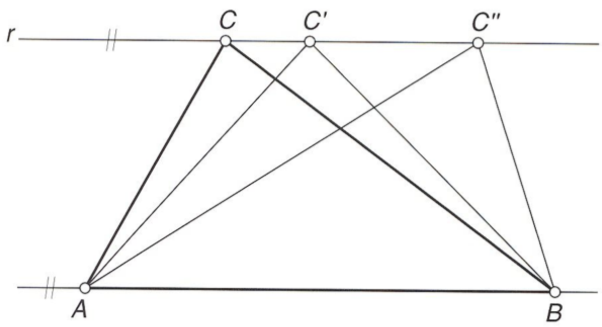
Transformaciones anamórficas

Equivalencia

Se denominan figuras **equivalentes** aquellas que teniendo diferente forma tienen igual área.

Triángulos equivalentes

Todos los triángulos que tengan la misma base y el vértice opuesto a ella sobre una recta r paralela a dicha base son equivalentes.

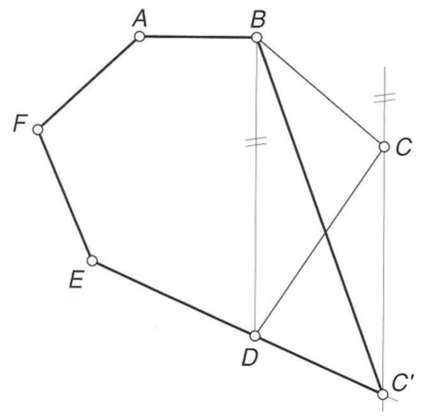


Polígonos equivalentes

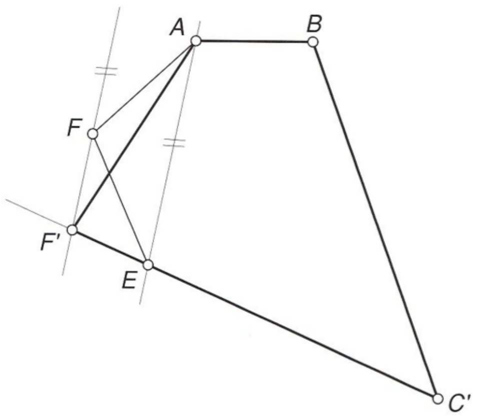
Con el método que a continuación se explica se puede construir un polígono equivalente a otro dado de un número igual de lados menos uno. Es decir, si se parte de una forma poligonal de seis lados, se puede pasar a una de cinco y, con una nueva aplicación del procedimiento, a otra de cuatro y así sucesivamente.

Veamos un ejemplo. Transformar una figura poligonal de seis lados ABCDEF en otra figura equivalente de cuatro lados ABCT:

1. Se traza la diagonal que une los vértices B y D, determinando así el triángulo BCD.
2. Por C se traza una paralela a la diagonal BD. Se prolonga el lado ED hasta que corte en C' a la paralela anteriormente trazada en C. Con estos trazados se ha obtenido un triángulo BCD con la misma área que el BCD, dado que tienen ambos la misma base e igual altura.
3. Por tanto, el polígono ABCDEF se ha transformado en otro equivalente de cinco lados ABCEF.

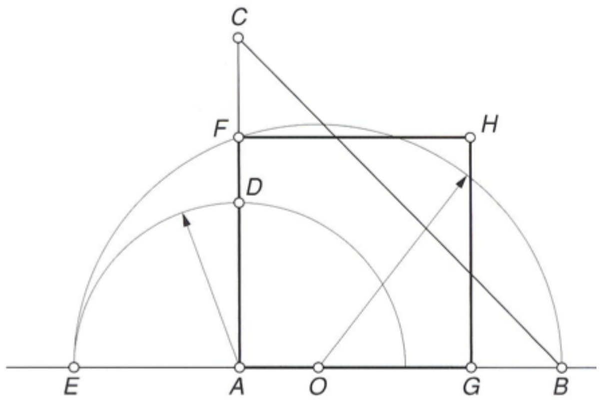


4. Para hallar la siguiente transformación sólo es necesario aplicar otra vez el mismo procedimiento, quedando de esta manera determinando el cuadrilátero ABCT buscado.



Cuadrado equivalente a un triángulo

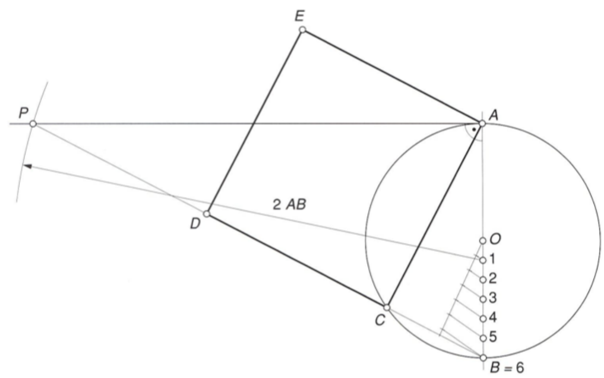
1. Se halla el punto D, punto medio de la altura AC del triángulo ABC dado. Con centro en el vértice A y radio AD, se describe un arco que corta a la prolongación de AB en el punto E.
2. Con centro en O, punto medio del segmento EB, y radio OE se traza una semicircunferencia que corta a AC en el punto F.
3. El segmento AF es el lado del cuadrado pedido.



Cuadrado equivalente a un círculo (cuadratura del círculo)

La cuadratura del círculo es una construcción aproximada, dado que en el cálculo del área del círculo se encuentra el número π, del que se desconoce su expresión decimal exacta.

1. Se dibuja un diámetro cualquiera AB, y por A se traza una recta tangente a la circunferencia. Se divide el radio OB en seis partes iguales, 1, 2, 3, etcétera.
2. Con centro en el punto 1, y radio igual al doble de la magnitud del diámetro, se traza un arco que corta a la tangente trazada anteriormente en P.
3. Se unen P y B con una recta que determina el punto C al cortar a la circunferencia. El segmento CA es el lado del cuadrado equivalente al círculo dado.



Equicomposición

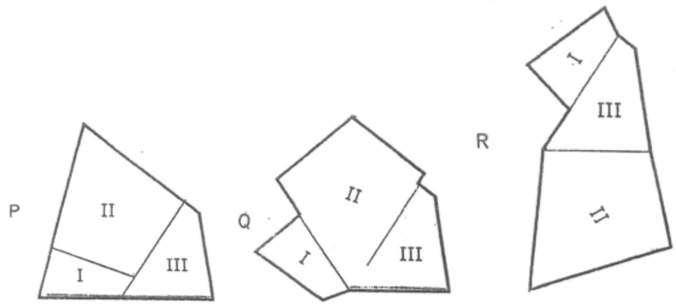
Si se divide en partes una figura plana dada, se denomina **equicomposición** a la construcción de otra de configuración distinta, compuesta con las partes de aquella.

A las figuras así obtenidas (que incluida la dada pueden se dos más) se les denomina **equicompuestas**.

Las figuras equicompuestas son equivalentes, pues sus áreas son iguales, y deben cumplir las siguientes condiciones:

- que cada figura tenga el mismo número de partes
- que el número de partes sea finito
- que cada parte tenga su respectiva igual en cada figura

Los polígonos P, Q y R son equicompuestos.


P
II
I
III
Q
II
I
III
R
I
III
II